

El método de los Autovalores paso a paso

Guillermo Collazos - gcollazo@ssd-h2o.com.ar

noviembre 2002

Resumen

El presente trabajo es el resumen de mis esfuerzos, pruebas numéricas, etc. en el intento de comprender el método de los autovalores.

Espero que los compañeros de la UPV que se enfrenten a la misma tarea, puedan encontrar en estas páginas una ayuda para hacer más fácil este aprendizaje.

Índice

Índice	1
1. Exposición del método	3
2. Dos caminos posibles	5
2.1. $U = 0$ o método de la L:	5
2.2. $U \neq 0$ o método de la U:	5
3. Simplificaciones convenientes	6
3.1. Parámetros de control	6
3.2. Acciones elementales	6
4. Los pasos del cálculo	8
5. Ejemplos detallados	9
5.1. Modo A (8 celdas activas):	11
5.2. Modo B (9 celdas activas)	15
5.3. Resultados con Visual ModFlow	18
6. El programa AutovaloresL	19
6.1. Descripción del archivo de datos	19
7. Referencias	22
8. Agradecimientos	22

1. Exposición del método

El Método de los Autovalores (MAV) sirve **para modelar acuíferos de comportamiento lineal (confinados) en forma distribuida**.

Es especialmente conveniente para integrarse en un modelo de simulación de recursos hídricos por el bajo esfuerzo computacional que requiere.

Este método ha sido propuesto por Sahuquillo, y aplicado profusamente en el DIHMA de la UPV.

Vamos a desarrollar el método trabajando con un acuífero bidimensional, discretizado con diferencias finitas y con una discretización del tiempo en intervalos regulares.

En estas condiciones, la ecuación de flujo del agua en medios porosos se expresa por la siguiente ecuación matricial:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{Q} = \mathbf{SF} \frac{\Delta H}{\Delta t} \quad (1)$$

donde:

- $\mathbf{T}(n, n)$: matriz simétrica en banda, que depende de la discretización hecha del acuífero y de la transmisividad de las celdas en las dos direcciones perpendiculares. [m^2/dia].
- $\mathbf{H}(n)$: vector de alturas piezométricas. [m].
- $\mathbf{Q}(n)$: vector de flujos exteriores. [m^3/dia].
- $\mathbf{SF}(n, n)$: matriz diagonal que depende de la discretización hecha del acuífero, de las condiciones de contorno y del coeficiente de almacenamiento de cada celda. [m^2].

Si las matrices \mathbf{T} y \mathbf{SF} son independientes de \mathbf{H} y constantes en el tiempo, la ecuación (1) es lineal, y por ello aplicable el principio de superposición. Esta condición se cumple en los acuíferos confinados siempre que permanezcan completamente saturados, y en forma aproximada en los acuíferos libres en los cuales los descensos piezométricos son despreciables respecto al espesor saturado.

La solución de la ecuación (1) para Q constante en el tiempo es:

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{SF} \cdot (\mathbf{H}_{k-1} - \mathbf{U}) + \mathbf{A} \cdot |\mathbf{I} - \mathbf{E}| \cdot |\alpha|^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q} \quad (2)$$

donde:

- k número del período de tiempo a evaluar. Cada período tiene una longitud Δt (casi siempre 1 mes).
- $U(n)$ vector de alturas piezométricas para régimen estacionario y $Q = 0$. [m].
- n es la cantidad de celdas en que se discretizo el acuífero.
- $A(n, n)$ es la matriz de autovectores del problema $T \cdot A = SF \cdot A \cdot |\alpha|$. Cada autovector ocupa una columna. [m^{-1}].
- $|\alpha|$ es el vector de autovalores del problema $T \cdot A = SF \cdot A \cdot |\alpha|$. Todos los elementos son positivos. [dia^{-1}].
- $A^T(n, n)$ es la traspuesta de la matriz A . [m^{-1}].
- $E(n, n)$ es una matriz diagonal, donde cada elemento de la diagonal vale:
 $e_{ii} = exp^{-\alpha_i \cdot \Delta t}$. [*adimensional*].

Cada vez que se produzca un cambio en el vector Q de flujos externos, se considera este instante como el instante inicial, con sus alturas existentes como $H_{k-1} = H_0$ y se aplica la ecuación (2).

Aquí se abren dos caminos, según el valor de U :

- si $U = 0$ es conveniente aplicar el Método de la L. Esta caso se produce cuando todas las celdas de altura constante son de $h = 0$ y no hay flujos impuestos en los bordes.
- si $U \neq 0$ hay que usar el Método de la U.

El MAV es más conveniente de usar, cuando se cumplen las siguientes 2 condiciones:

- Las celdas de nivel constante tienen altura nula
- Los bordes son impermeables

2. Dos caminos posibles

2.1. $U = 0$ o método de la L:

Si todas las celdas de altura constante son de altura cero, y no hay flujos impuestos en los bordes $U = 0$, y en la ecuación (2) se elimina el primer término.

Si definimos un vector L , tal que: $H_k = A \cdot L_k$

la ecuación (2) se reduce a:

$$L_k = E \cdot L_{k-1} + X \cdot Q_k \quad (3)$$

y $L_0 = A^T \cdot SF \cdot H_0$,

donde:

- $L(n)$ es un vector auxiliar. $[m^2]$. Este vector es denominado vector de estado.
- $X(n, n)$, es igual a: $X = |I - E| \cdot |\alpha|^{-1} \cdot A^T$. $[dia/m]$.

2.2. $U \neq 0$ o método de la U:

En este caso se debe calcular además el vector U (de estado estacionario), resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que queda planteado al aplicar el balance de masa en cada nudo y la ecuación de flujo de Darcy.

Una vez hecho esto es necesario utilizar la ecuación completa (2) para los cálculos de las alturas, que transcribimos nuevamente:

$$H_k = U + A \cdot E \cdot A^T \cdot SF \cdot (H_{k-1} - U) + A \cdot |I - E| \cdot |\alpha|^{-1} \cdot A^T \cdot Q$$

Algunos productos de matrices pueden calcularse una sola vez (al principio), ya que no se modifican posteriormente lo que se permite simplificar la notación a:

$$H_k = U + MzFija1 \cdot (H_{k-1} - U) + MzFija2 \cdot Q \quad (4)$$

donde:

- $MzFija1(n, n)$, es igual a: $MzFija1 = A \cdot E \cdot A^T \cdot SF$. $[adimensional]$.
- $MzFija2(n, n)$, es igual a: $MzFija2 = A \cdot |I - E| \cdot |\alpha|^{-1} \cdot A^T$. $[dia/m^2]$.

3. Simplificaciones convenientes

Se presentan dos conceptos que en ciertos casos simplifican la aplicación del método.

3.1. Parámetros de control

Cuando incorporamos un modelo de acuífero a un modelo de gestión, no hace falta conocer la altura piezométrica en todas las celdas, sino tener una idea más bien global del estado del acuífero.

Así surge el concepto de **parámetro de control**, que es justamente un valor indicador del estado del acuífero simulado. El caso más simple es que los parámetros de control sean las alturas piezométricas, pero también pueden ser el volumen almacenado en alguna u algunas celdas, las salidas del acuífero, etc.

En lugar de usar la definición $H_k = A \cdot L_k$, utilizamos la siguiente expresión:

$$PC_k = A_R \cdot L_k \quad (5)$$

- $PC(npc)$ es el vector de parámetros de control del acuífero. [m].
- $A_R(npc, n)$ es la matriz A reducida. Si los parámetros de control son alturas piezométricas, A_R contiene las filas de A de las celdas cuya altura es parámetro de control. [m^{-1}]. Si los parámetros de control son todas las alturas piezométricas, $A_R = A$.

Los parámetros de control pueden ser también volúmenes almacenados en un conjunto de celdas, salidas del acuífero, etc. Este concepto de los parámetros de control solo es aplicable si estamos usando el método de la L .

3.2. Acciones elementales

Un concepto análogo aplicado a las acciones exteriores se denomina **acción elemental**. Las acciones externas sobre el acuífero suelen tener más o menos la misma configuración espacial, variando de un período a otro en su magnitud. Usando este concepto, la ecuación (2) se simplifica, quedando así:

$$L_k = E \cdot L_{k-1} + X \cdot Q_{AE} \cdot I_k \quad (6)$$

$$L_k = E \cdot L_{k-1} + \Psi \cdot I_k \quad (7)$$

donde:

- $Q_{AE}(n, nae)$ matriz de acciones elementales, en la que cada columna es una acción elemental, y por ende los elementos de cada columna deben sumar 1. [*adimensional*]. Es dato.
- $\Psi(n, nae)$ es igual a: $\Psi = X \cdot Q_{AE}$. [dia/m].
- $I(nae)$ es el vector de intensidades de las acciones elementales [m^3/dia]. Es dato.

El concepto de acciones elementales se pueden aplicar tanto para el caso de $U = 0$ como para el caso de $U \neq 0$.

4. Los pasos del cálculo

Para utilizar el método de los autovalores se han de seguir los siguientes pasos:

1. Preparar la discretización del acuífero, las condiciones de contorno y las propiedades de transmisividad y almacenamiento de cada celda. También numerar las celdas activas de izquierda a derecha y de arriba a abajo.
2. Obtener las matrices T y SF del MAV.

$$sf(ii) = \text{almacenamiento}_i \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Para cada celda i analizada, j toma los números de celdas de arriba, abajo, derecha e izquierda de la celda analizada, siempre que sean celdas activas.

$$t_{ii} = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\frac{1}{\text{transmisividad}_i} + \frac{1}{\text{transmisividad}_i}}$$
$$t_{ij} = \frac{-1}{\frac{1}{\text{transmisividad}_i} + \frac{1}{\text{transmisividad}_j}}$$

3. Construir la matriz C (simétrica): $c_{ij} = sf_{ii} \cdot t_{ij} \cdot sf_{jj}$
4. Obtener los n autovalores α y autovectores Y de C . Esto se calcula generalmente con alguna librería estándar, preparada para este fin.
5. Obtener los autovectores A que cumplen $T \cdot A = \alpha \cdot SF \cdot A$.
6. Asignar los datos a las matrices: H_0 , Q o Q^{AE} , e I .
7. Calcular las matrices fijas que correspondan según el método y las simplificaciones elegidas.
8. Calcular los valores de L o H para los diversos pasos de tiempo.
9. Para calcular el caudal transferido entre dos celdas vecinas se emplea la simple fórmula de Darcy en medios discretizados: $q_{1-2} = T_{1-2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \Delta h$

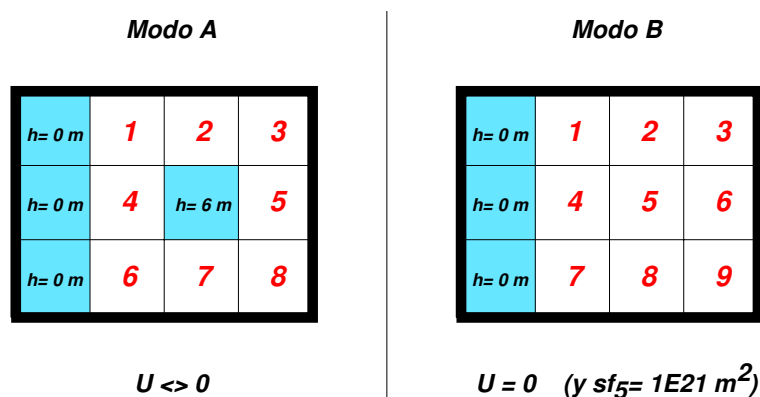
5. Ejemplos detallados

A continuación presentamos con detalle un ejemplo simple que figura en el Anejo E de la tesis doctoral de Joaquín Andreu Álvarez (JAA).

Una aclaración importante: en este ejemplo no todas las celdas de nivel constante son de $h = 0$, por lo que en rigor habría que utilizar el procedimiento de la U y modelar las 8 celdas de altura variable.

En su defecto, JAA ha empleado un *truquito* de considerar la celda de $h = 6$ como celda de altura variable, y utilizar el método de la L, pero asignándole a esa celda un coeficiente de almacenamiento enorme, de forma que no modifique su altura aunque intercambie agua. Eso también es perfectamente válido y, como se verá, se llega al mismo resultado.

Pero si hubiera habido una condición de flujo impuesto por algún borde, no se hubiera podido emplear este *truquito* y habría que haber usado el método de la U, si o si.



El acuífero de la figura es homogéneo e isotrópico. Todas las celdas son cuadradas de $\Delta x = \Delta y = 666,67\text{ m}$, la trasmisividad vale $100\text{ m}^2/\text{dia}$, el almacenamiento $0,1$. El paso de tiempo adoptado es $\Delta t = 30\text{ dias}$. Las alturas iniciales y las acciones exteriores sobre el acuífero son las siguientes (la numeración corresponde al Modo B):

celda (Modo B)	$h_0[m]$	$Q_{\Delta t}[m^3/\text{dia}]$					
		celda	0-30 días	30-60 días	60-90 días	90-120 días	120-150 días
1	1,00	1	300	400	400	100	0
2	2,00	2	200	200	400	100	0
3	3,00	3	300	0	400	500	400
4	1,00	4	300	400	400	100	0
5	6,00	5	0	0	0	0	0
6	3,00	6	200	0	400	100	0
7	1,00	7	300	400	400	100	0
8	2,00	8	200	200	400	100	0
9	3,00	9	300	0	400	500	400

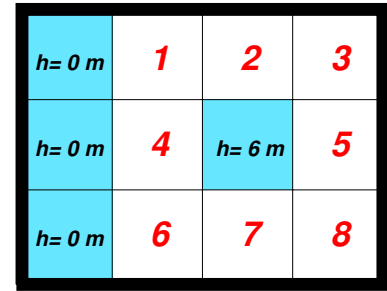
En este caso, el uso del concepto de acciones elementales no conlleva una reducción significativa de la información a entregarle al programa, porque se trata de pocos periodos de cálculo, y las acciones exteriores no son demasiado regulares en el tiempo (la distribución espacial de las extracciones cambia). De todas formas las utilizamos para aclarar el concepto.

5.1. Modo A (8 celdas activas):

$$H_k = U + MzFija1 \cdot (H_{k-1} - U) + MzFija2 \cdot Q$$

Los datos de almacenamiento [*adimensional*]:

fila \ col	1	2	3	4
1	1E+21	0.1	0.1	0.1
2	1E+21	0.1	0.1	0.1
3	1E+21	0.1	0.1	0.1



Los datos de transmisividad [m^2/dia]:

fila \ col	1	2	3	4
1	1E+21	0.1	0.1	0.1
2	1E+21	0.1	0.1	0.1
3	1E+21	0.1	0.1	0.1

$SF [m^2]$:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	44444.45	0	0	0	0	0	0	0
2	0	44444.45	0	0	0	0	0	0
3	0	0	44444.45	0	0	0	0	0
4	0	0	0	44444.45	0	0	0	0
5	0	0	0	0	44444.45	0	0	0
6	0	0	0	0	0	44444.45	0	0
7	0	0	0	0	0	0	44444.45	0
8	0	0	0	0	0	0	0	44444.45

$T [m^2/dia]$:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	300	-100	0	-100	0	0	0	0
2	-100	300	-100	0	0	0	0	0
3	0	-100	200	0	-100	0	0	0
4	-100	0	0	400	0	-100	0	0
5	0	0	-100	0	300	0	0	-100
6	0	0	0	-100	0	300	-100	0
7	0	0	0	0	0	-100	300	-100
8	0	0	0	0	-100	0	-100	200

$C [1/dia]$ (simétrica):

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.00675	-0.00225	0	-0.00225	0	0	0	0
2	-0.00225	0.00675	-0.00225	0	0	0	0	0
3	0	-0.00225	0.00450	0	-0.00225	0	0	0
4	-0.00225	0	0	0.00900	0	-0.00225	0	0
6	0	0	-0.00225	0	0.00675	0	0	-0.00225
7	0	0	0	-0.00225	0	0.00675	-0.00225	0
8	0	0	0	0	0	-0.00225	0.00675	-0.00225
9	0	0	0	0	-0.00225	0	-0.00225	0.00450

Autovalores $[1/d]$:

	1	2	3	4	5	6	7	8
av	0.011727	0.009609	0.009556	0.007257	0.005749	0.003773	0.002696	0.001383

A (cada AVector es una columna) $[1/m]$:

i \ av	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0.002022	0.000217	0.001982	0.000798	-0.002472	0.002428	-0.001100	0.000771
2	0.001135	0.001330	-0.002472	-0.002241	-0.001100	0.001122	-0.001982	0.001383
3	-0.000492	-0.001908	0.001100	-0.000293	0.001982	-0.000944	-0.002472	0.002528
4	0.003331	-0.001606	0.000000	0.002061	0.000000	0.002091	0.000000	0.000455
6	0.000444	0.003002	0.000000	0.002600	0.000000	-0.001427	0.000000	0.002120
7	-0.002019	0.000217	-0.001982	0.000798	0.002472	0.002428	0.001100	0.000771
8	0.001135	0.001330	0.002472	-0.002241	0.001100	0.001122	0.001982	0.001383
9	-0.000492	-0.001908	-0.001100	-0.000293	-0.001982	-0.000944	0.002472	0.002528

U [m]:

	1	2	3	4	5	6	7	8
i	2.351	4.378	4.784	2.676	5.189	2.351	4.378	4.784

E [adimensional]:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.703407	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.749549	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.750759	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.804354	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.841592	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.892975	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.922314	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0.959364

MzFija1 [adimensional]:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.82037	0.05525	0.00191	0.05343	0.00004	0.00182	0.00004	0.00000
2	0.05525	0.82045	0.05716	0.00182	0.00191	0.00004	0.00000	0.00004
3	0.00191	0.05716	0.87761	0.00004	0.05716	0.00000	0.00004	0.00195
4	0.05343	0.00182	0.00004	0.76694	0.00000	0.05343	0.00182	0.00004
5	0.00004	0.00191	0.05716	0.00000	0.82050	0.00004	0.00191	0.05716
6	0.00182	0.00004	0.00000	0.05343	0.00004	0.82037	0.05525	0.00191
7	0.00004	0.00000	0.00004	0.00182	0.00191	0.05525	0.82045	0.05716
8	0.00000	0.00004	0.00195	0.00004	0.05716	0.00191	0.05716	0.87761

$MzFija2$ [dia/m²):

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.000612	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.000612	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.000632	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.000592	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.000612	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.000612	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.000612	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0.000632

En este caso no usamos el concepto de acciones elementales para mostrar su uso es opcional. En particular en este caso, que hay pocos intervalos de tiempo y la forma de las recargas es diferente de un intervalo a otro, el uso de las acciones elementales no simplifica los cálculos.

Q [m³/dia] (dato):

celda \ t	1	2	3	4	5
1	300.00	400.00	400.00	100.00	0.00
2	200.00	200.00	400.00	100.00	0.00
3	300.00	0.00	400.00	500.00	400.00
4	300.00	400.00	400.00	100.00	0.00
5	200.00	0.00	400.00	100.00	0.00
6	300.00	400.00	400.00	100.00	0.00
7	200.00	200.00	400.00	100.00	0.00
8	300.00	0.00	400.00	500.00	400.00

H [m]:

celda \ tiempo	0	1	2	3	4	5
1	1.000	1.209	1.489	1.763	1.834	1.845
2	2.000	2.378	2.705	3.119	3.304	3.413
3	3.000	3.149	3.126	3.399	3.736	3.984
4	1.000	1.427	1.841	2.190	2.299	2.327
5	3.000	3.315	3.457	3.833	3.995	4.102
6	1.000	1.209	1.489	1.763	1.834	1.845
7	2.000	2.378	2.705	3.119	3.304	3.413
8	3.000	3.149	3.127	3.399	3.736	3.984

5.2. Modo B (9 celdas activas)

$$L_k = E \cdot L_{k-1} + \Psi \cdot I_k$$

$$H_k = A \cdot L_k$$

Los datos de almacenamiento:

fila \ col	1	2	3	4
1	1E+21	0.1	0.1	0.1
2	1E+21	0.1	1E+21	0.1
3	1E+21	0.1	0.1	0.1

$h=0\text{ m}$	1	2	3
$h=0\text{ m}$	4	5	6
$h=0\text{ m}$	7	8	9

Los datos de transmisividad:

fila \ col	1	2	3	4
1	1E+21	0.1	0.1	0.1
2	1E+21	0.1	1E+21	0.1
3	1E+21	0.1	0.1	0.1

$SF[m^2]$:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	44444.45	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	44444.45	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	44444.45	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	44444.45	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1E21	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	44444.45	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	44444.45	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	44444.45	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	44444.45

$T[m^2/dia]$:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	300	-100	0	-100	0	0	0	0	0
2	-100	300	-100	0	-100	0	0	0	0
3	0	-100	200	0	0	-100	0	0	0
4	-100	0	0	400	-100	0	-100	0	0
5	0	-100	0	-100	400	-100	0	-100	0
6	0	0	-100	0	-100	300	0	0	-100
7	0	0	0	-100	0	0	300	-100	0
8	0	0	0	0	-100	0	-100	300	-100
9	0	0	0	0	0	-100	0	-100	200

$C[1/dia]$ (simétrica):

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.00675	-0.00225	0	-0.00225	0	0	0	0	0
2	-0.00225	0.00675	-0.00225	0	-2.25E-14	0	0	0	0
3	0	-0.00225	0.0045	0	0	-0.00225	0	0	0
4	-0.00225	0	0	0.009	-2.25E-14	0	-0.00225	0	0
5	0	-2.25E-14	0	-2.25E-14	9E-25	-2.25E-14	0	-2.25E-14	0
6	0	0	-0.00225	0	-2.25E-14	0.00675	0	0	-0.00225
7	0	0	0	-0.00225	0	0	0.00675	-0.00225	0
8	0	0	0	0	-2.25E-14	0	-0.00225	0.00675	-0.00225
9	0	0	0	0	0	-0.00225	0	-0.00225	0.00450

Autovalores[1/d]:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
av	0.011727	0.009609	0.009556	0.007257	0.005749	0.003773	0.002696	0.001383	0.000000

A (cada AVector es una columna) [1/m]:

i \ av	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-0.002022	0.000217	0.001982	0.000798	-0.002472	0.002428	-0.001100	0.000771	0.000000
2	0.001135	0.001330	-0.002472	-0.002241	-0.001100	0.001122	-0.001982	0.001383	0.000000
3	-0.000492	-0.001908	0.001100	-0.000293	0.001982	-0.000944	-0.002472	0.002528	0.000000
4	0.003331	-0.001606	0.000000	0.002061	0.000000	0.002091	0.000000	0.000455	0.000000
5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
6	0.000444	0.003002	0.000000	0.002600	0.000000	-0.001427	0.000000	0.002120	0.000000
7	-0.002019	0.000217	-0.001982	0.000798	0.002472	0.002428	0.001100	0.000771	0.000000
8	0.001135	0.001330	0.002472	-0.002241	0.001100	0.001122	0.001982	0.001383	0.000000
9	-0.000492	-0.001908	-0.001100	-0.000293	-0.001982	-0.000944	0.002472	0.002528	0.000000

E [adimensional]:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.703407	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.749549	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.750759	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.804354	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.841592	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.892975	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.922314	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0.959364	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1.000000

X [d/m]:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-0.05105	0.02870	-0.01243	0.08424	0.00000	0.01124	-0.05105	0.02870	-0.01243
2	0.00567	0.03466	-0.04971	-0.04186	0.00000	0.07824	0.00567	0.03466	-0.04971
3	0.05170	-0.06447	0.02869	0.00000	0.00000	0.00000	-0.05170	0.06447	-0.02869
4	0.02152	-0.06042	-0.00790	0.05556	0.00000	0.07010	0.02152	-0.06042	-0.00790
5	-0.06812	-0.03031	0.05462	0.00000	0.00000	0.00000	0.06811	0.03031	-0.05462
6	0.06888	0.03182	-0.02677	0.05930	0.00000	-0.04047	0.06888	0.03182	-0.02677
7	-0.03170	-0.05713	-0.07124	0.00000	0.00000	0.00000	0.03170	0.05713	0.07124
8	0.02265	0.04064	0.07430	0.01338	0.00000	0.06230	0.02265	0.04064	0.07430
9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Q_{AE} [d/m] (armada a partir de los datos de bombeos):

i \ j	1	2	3	4
1	0.333	0	0	0
2	0	0.500	0	0
3	0	0	0.500	0
4	0.333	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	1.000
7	0.333	0	0	0
8	0	0.500	0	0
9	0	0	0.500	0

$\Psi [d/m]$:

i \ j	1	2	3	4
1	-0.00595592	0.02869969	-0.01243470	0.01124226
2	-0.01017372	0.03465815	-0.04971543	0.07823882
3	0	0	0	0
4	0.03286510	-0.06041640	-0.00790079	0.07009819
5	0	0	0	0
6	0.06567859	0.03182502	-0.02677288	-0.04047281
7	0	0	0	0
8	0.01955477	0.04064126	0.07430041	0.06229560
9	0	0	0	0

$L0 [m^2]$:

1	-210.775
2	-177.269
3	-0.0041245
4	17.8935
5	0.000237205
6	-396.106
7	0.00839735
8	-1025.99
9	1.2649E14

$I [m^3/dia]$ (deducida de los datos y de las acciones elementales elegidas):

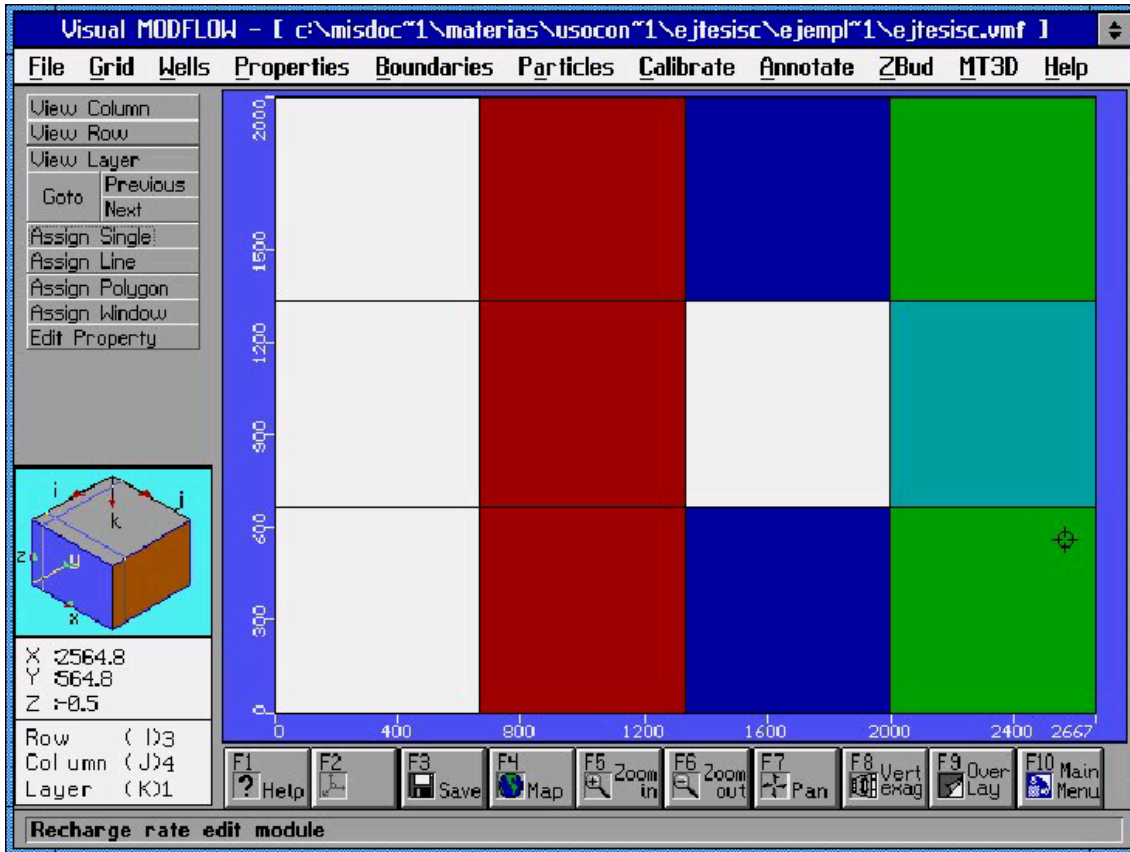
ae \ t	1	2	3	4	5
1	900	1200	1200	300	0
2	400	400	800	200	0
3	600	0	800	1000	800
4	200	0	400	100	0

$H [m]$:

celda \ tiempo	0	1	2	3	4	5
1	1.000	1.209	1.489	1.763	1.834	1.845
2	2.000	2.378	2.705	3.119	3.304	3.413
3	3.000	3.149	3.126	3.399	3.736	3.984
4	1.000	1.427	1.841	2.190	2.299	2.327
5	6.000	6.000	6.000	6.000	6.000	6.000
6	3.000	3.315	3.457	3.833	3.995	4.102
7	1.000	1.209	1.489	1.763	1.834	1.845
8	2.000	2.378	2.705	3.119	3.304	3.413
9	3.000	3.149	3.127	3.399	3.736	3.984

5.3. Resultados con Visual ModFlow

A continuación presentamos los resultados obtenidos al resolver el mismo ejemplo mediante ModFlow. Se usó la interfaz gráfica Visual ModFlow, de Waterloo Hydrogeologic. En la siguiente dirección de internet <http://www.flowpath.com> se puede descargar un demo que permite visualizar los archivos del ejemplo presentado que se adjuntan en el diskette.



Las alturas obtenidas mediante VMF son (numeración correspondiente al Modo B):

celda \ tiempo	0	1	2	3	4	5
1	1.000	1.210	1.488	1.761	1.832	1.843
2	2.000	2.375	2.700	3.113	3.298	3.408
3	3.000	3.151	3.129	3.402	3.736	3.983
4	1.000	1.422	1.833	2.181	2.290	2.320
5	3.000	3.312	3.453	3.828	3.992	4.100
5	6.000	6.000	6.000	6.000	6.000	6.000
7	1.000	1.210	1.488	1.761	1.832	1.843
8	2.000	2.375	2.700	3.113	3.298	3.408
9	3.000	3.151	3.129	3.402	3.736	3.983

6. El programa AutovaloresL

El programa lo cree para realizar los cálculos del MAV. Está escrito en fortran, y tiene las siguientes características, opciones, restricciones, etc.:

- Admite solo una malla regular, con $\Delta x = \Delta y$. (el paso de los AV de C a los AC de A no está verificado para malla no cuadrada).
- La transmisividad del acuífero debe ser isótropa: ($T_y = T_x$).
- El método de cálculo lo elijo en el archivo de datos y adaptar los restantes datos a esta elección. (ver en el ejemplo). Para ello previamente tengo que hacer la numeración de las celdas y mirar un poco el caso.
- El programa lee un archivo auxiliar C:\Temp\AuxMAV.txt. Este archivo debe existir y tener en la 3ra línea el path del archivo de datos.
- El archivo de control de incidencias se crea en la carpeta del archivo de salida si hay algún problema en la lectura de los datos o similar.
- La salida en formato SimGes sólo se produce si se cumplen todas estas condiciones: si se pide en las opciones, si se usa el método de la L, y si se usan acciones elementales. Esta parte del archivo de salida se puede cortar y pegar en un archivo nuevo y está lista para que la lea SimGes cuando se define un acuífero desde archivo.
- El programa está probado sólo con los casos pequeños presentados como ejemplo. Lógicamente, hacen falta pruebas más exhaustivas.

El programa realiza los pasos del 2 en adelante, de los mencionados en la sección 4. Se adjunta un diskette con dicho programa, y los archivos de entrada y salida para los casos de ejemplo anteriores. También una carpeta con los datos del mismo problema resuelto mediante Visual ModFlow, a efectos comparativos.

6.1. Descripción del archivo de datos

El archivo de datos es un archivo de texto. A modo de ejemplo se presenta la transcripción de un archivo de entrada de uno de los casos de ejemplo anteriores.

```
Archivo nuevo para el programa de Autovalores en Fortran - Guille, UPV, año 2002
MOD0 A (8 celdas), usando AE
```

```
Path del archivo de salida:
```

```
C:\Mis documentos\Materias\UsoConjunto\EjTesisC\Sal-ModoA-AE.wri
```

```
Opción de impresión de Autovalores, autovectores y matrices intermedias:
```

```
SI
```

```
Opción de usar U <> 0:
```

```
SI
```

```
Opción de salida en formato matricial de SF y T (NO: salen sólo las celdas no nulas):
```

SI

Opción de usar acciones elementales (NO: introduzco los Q en cada celda):

SI

Cant. de filas, columnas, acciones elementales, parámetros de control y pasos de tiempo:

3 4 4 9 5

Ancho y alto de las celdas (x, y) [m]:

666.6667 666.6667

Matriz de tipos de celdas (0: no activas; 1: activas; -1: activas de nivel ctte = 0):

f\c	1	2	3	4
1	-1	1	1	1
2	-1	1	-1	1
3	-1	1	1	1

Matriz de trasmisividad [m2/dia] (para todas las celdas activas):

f\c	1	2	3	4
1	100	100	100	100
2	100	100	100	100
3	100	100	100	100

Matriz de coeficiente de almacenamiento [adimensional]:

f\c	1	2	3	4
1	0.01	0.1	0.1	0.1
2	0.01	0.1	0.1	0.1
3	0.01	0.1	0.1	0.1

Alturas iniciales [m]:

f\c	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	0	1	6	3
3	0	1	2	3

Acciones elementales (en cada acción se debe sumar 1):

celda\ ae	1	2	3	4
1	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.5000	0.0000
4	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
6	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.5000	0.0000

Intensidades de las acciones elementales [m3/dia]:

ae\t	1	2	3	4	5
1	900	1200	1200	300	0
2	400	400	800	200	0
3	600	0	800	1000	800
4	200	0	400	100	0

7. Referencias

1. Sahuquillo Herraiz, Andrés: *El método de los Autovalores, Curso: Utilización conjunta de aguas superficiales y subterráneas, Valencia-Castellón de la Plana, -1983-*
2. Sahuquillo Herraiz, Andrés: *Nuevo método para resolver modelos matemáticos de acuíferos en forma continua en el tiempo: el procedimiento de los autovalores, Servicio Geológico de Obras Públicas (Madrid) - Universidad Politécnica de Valencia -1992-*
3. Andreu Álvarez, Joaquín et. al.: *Conceptos y Métodos Para la Planificación Hidrológica, Simulación de acuíferos en los modelos de gestión, Universidad Politécnica de Valencia -1992-*
4. Sahuquillo Herraiz, Andrés: *Métodos existentes para cuantificar la interacción entre aguas superficiales y subterráneas, Revista de Geofísica -1986- 42, 227-238*
5. Sahuquillo Herraiz, Andrés: *An Eigenvalue Numerical Technique for Solving Unsteady Linear Groundwater Models Continuously in Time, Water Resources Research -feb. 1983- Vol 19, Nro. 1, Páginas 87-93*
6. Sahuquillo Herraiz, Andrés y Andreu Álvarez, Joaquín: *Efficient aquifer simulation in complex systems, Journal of Water Resources Planning and Management -1987*
7. Sahuquillo Herraiz, Andrés y Andreu Álvarez, Joaquín: *The eigenvalues approach for solving linear groundwater flow problems, Groundwater Flow and Quality Modelling (E. Custodio et al (eds.)) -1988- Páginas 151-164*

8. Agradecimientos

Agradezco la paciencia de los profesores Andrés Sahuquillo Herraiz y Joaquín Andreu Álvarez al responder las numerosas inquietudes planteadas.

También agradezco la revisión que realizó David Pulido Velázquez de este texto, para dar lugar a la versión actual.

La última versión de éste documento está disponible en la web: www.ssd-h2o.com.ar

Pendientes

Cosas pendientes de agregar y/o resolver:

- Calcular MzC cuando $T_x \neq T_y$.
- PC distintos de alturas
- Funciones de influencia